ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

- Έστω A και B σύνολα
  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ και $b \in B\}$
  Η διαφορά από το σύνολο (a,b) και το $\{a,b\}$ είναι ότι το πρώτο είναι διατεταγμένο

- Σχέση μεταξύ του A και B είναι $\Sigma \subseteq A \times B$

- Σχέση ισοδυναμίας στο A, έστω σχέση R
  Θα πρέπει να πληρούνται:
  1) Αναυλαστική: $\forall a \in A \Rightarrow aRa$
  2) Συμμετρική: Αν $aRb \Rightarrow bRa$
  3) Μεταβατική: Αν aRb και $bRc \Rightarrow aRc$

πχ

$A = \{1, *, \square, +\}$

Μια σχέση που μπορεί να υπάρξει είναι

$\{1R1, *R*, \square R \square, +R+\}$

Μια άλλη σχέση είναι

$\{xRy \mid x, y \in A\}$

Μια άλλη σχεση είναι

$\{1R1, *R*, \square R \square, +R+, 1R*, 1R\square, 1R+, *R1, \square R1, +R1\}$

Δηλαδή $A = \{1, *, \square, +\}$ για τη σχεση xRx

$A = \{1, +\} \sqcup \{*\} \sqcup \{\square\}$

Για κάθε στοιχείο $x \in A$ ορίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $\bar{x} = \{y \in A$ ωστε $xRy\}$

Αν $x \neq y$ και $x, y \in A \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ ή $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\bar{x} = \bar{y}$ προφανές

Αν $\bar{x} \neq \bar{y}$ και $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z): z \in \bar{x} \wedge z \in \bar{y}$

Αρα, $xRz \wedge yRz \Rightarrow xRz \wedge zRy \Rightarrow xRy$

Αν $x \in A \Rightarrow$ Υπάρχει και η κλάση ισοδυναμίας του $\bar{x}$
Άρα, $A = \sqcup \bar{x}$, $\bar{x}$: ξένες κλάσεις ισοδυναμίας
Άρα, η R ορίζει μια διαμέριση στο A

Ορισμός: Έστω A σύνολο και $A_1, \ldots, A_k$ ξένα σύνολά του
Αν $A = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i$, τότε τα $A_1, \ldots, A_k$ αποτελούν μια διαμέριση.

- Έστω $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k$ μια διαμέριση του A. Με τη βοήθεια της θα ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο A ως εξής:
xRy ανν $\exists i = 1, \ldots, k$ ώστε $x, y \in A_i$

- Έστω $f: A \to B$ απεικόνιση
Η f ορίζει σχέση ισοδυναμίας στο A
xRx' αν.ν $f(x) = f(y)$
$\forall y \in B \Rightarrow f^{-1}(y)$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του x αν $f(x) = y$.

Έστω $S = \{$όλα τα σύνολα$\}$ κατηγορία συνόλων
Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας R στο S ως εξής
$ARB \Leftrightarrow \exists f$ 1-1 και επί με $f: A \to B$, όπου
- ARA (Αν f η ταυτοτική)
- Αν $ARB \Rightarrow BRA$ (ορίζεται η f^{-1})
- Αν $\underset{f}{ARB} \wedge \underset{g}{BR\Gamma} \Rightarrow \underset{g\circ f}{AR\Gamma}$ (Από τη σύνθεση)

Οι κλάσεις ισοδυναμίας εξαρτώνται από το πλήθος των στοιχείων και τις αντίστοιχες 1-1 και επί απεικονίσεις

Πράξη σε ένα σύνολο A:
Είναι μία απεικόνιση $\square: A\times A \to A$
$(a,b) \mapsto a\square b$

Στο A έχει οριστεί και μία σχέση ισοδυναμίας $R \subseteq A\times A$. Θα λέμε ότι η πράξη $\square$ είναι συμβιβαστή με τη σχέση R αν:
$aRb \Rightarrow a\square\gamma\, R\, b\square\gamma$ και $\gamma\square a\, R\, \gamma\square b$.

πχ
$\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ με την πρόσθεση και τον πολ/μο όπου δεν ορίζονται οι αντίθετοι και οι αντίστροφοι όμως έχουμε ουδέτερο στοιχείο και για την πρόσθεση 0 και για τον πολ/μο 1.

Έτσι ορίζουμε τη σχέση στο $\mathbb{N}$ ως εξής
$R: A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $(n,m)R(k,l) \Leftrightarrow n+l=m+k$
Είναι σχέση ισοδυναμίας;;
1) Ανακλαστική: $\forall k,l$ ισχύει: $(k,l)R(k,l) \Leftrightarrow k+l=l+k$
2) Συμμετρική: Αν $(k,l)R(n,m) \Rightarrow (n,m)R(k,l)$;
$(k,l)R(n,m) \Leftrightarrow k+m=l+n \Leftrightarrow n+l=k+m \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n,m)R(k,l)$ άρα ισχύει
3) Μεταβατική: Αν $(k,l)R(n,m)$ και $(n,m)R(p,r) \Rightarrow$
$\Rightarrow (k,l)R(p,r)$ (όμοια αποδεικνύεται)

Πλήρης Απόδειξη ορισμού του συνόλου των Ακεραίων $\mathbb{Z}$
$(0,0)R(k,k) \Leftrightarrow 0+k=k+0$, $\forall k\in\mathbb{N}$
$\overline{(0,0)}$ = κλάση ισοδυναμίας $=\{(k,k) \mid \forall k\in\mathbb{N}\}$
Εάν (k,l) σχέση με $l\neq k$ ανήκει στο $\overline{(0,0)}$
$(0,0)R(k,l) \Leftrightarrow 0+k=l+0 \Leftrightarrow k=l$

$\overline{(1,0)} = \{(k+1, k) \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$

$(1,0) R (k+1, k) \Leftrightarrow 1+k = 0+k+1$ ισχύει

$\overline{(l,0)} = \{(k+l, k) \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$

$l \in \mathbb{N}$ έχουμε την κλάση $\overline{(l,0)}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (m,n)$

- $m \geq n$, $\overline{(m,n)} = \overline{(m-n,0)}$
- $m < n$, $\overline{(m,n)} = \overline{(m-n,0)}$

$\overline{(0,1)} = \{(k,k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$

$\overline{(0,l)} = \{(k,k+l) \mid k \in \mathbb{N}\}$

$\lambda \in \mathbb{N}$, άρα $\overline{(0,n-m)} = \overline{(m,n)}$

$\overline{(l,0)} \longmapsto l$

$\overline{(0,l)} \longmapsto -l$

Το $\mathbb{Z}$ αποτελεί από τις κλάσεις ισοδυναμίας

$(n,m) R (k,l)$ με $n+l = m+k$